تصحيح تمارين : الأعداد العقدية الجزء (1)

01.

نكتب z على شكل $a+bi$ مع a و b من $\mathbb{R}$ حيث : ؛ $z=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$ ؛

- $z=2+6i-(-5+7i)+2+5+6I-7i=7-i$.
- $z=(1-2i)(2-5i)=1\times 2+1\times(-5i)-(2i)\times 2-(2i)\times(-5i)=2-5i-4i-10=-8-9i$.
- $z=2i\overline{(1-2i)}(1-2i)=2i(1+2i)(1-2i)=2i\left(1^2-(2i)^2\right)=2i+2i\times 4=10i$.
- $z=(1+3i)^2(-5+7i)=(1+2\times 3i-9)(-5+7i)=(-8+6i)(-5+7i)=40-56i-30i-42=-2-86i$.
- $3i-\frac{7}{i}=3i-\frac{7\times(-i)}{i\times(-i)}=3i-\frac{-7i}{1}=3i+7i=10i$.
- $z=\frac{8}{2-3i}=\frac{8(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{16+24i}{2^2+3^2}=\frac{16}{13}+\frac{24}{13}i$.
- $z=\frac{1}{2-7i}+\frac{1}{2+7i}=\frac{1\times(2+7i)+1(2-7i)}{(2-7i)(2+7i)}=\frac{4}{2^2+7^2}=\frac{4}{53}$.
- $z=\frac{8i-1}{2-3i}=\frac{(8i-1)((2+3i))}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{16i-24-2-3i}{2^2+3^2}=\frac{-26+13i}{13}=-2+i$.
- $z=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\left(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)^2=\left(\frac{2+2i+2i-1}{2^2+1}\right)^2=\left(\frac{1+4i}{5}\right)^2=\frac{1-16+8i}{25}=\frac{-15}{25}+\frac{8}{25}i$.

02.

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم لحق النقطة M هو العدد العقدي $z=x+yi$ مع x و y من $\mathbb{R}$ نربط كل عدد عقدي z (حيث $z\neq -i$ بالعدد العقدي $Z=\frac{z-2-i}{z+i}$.

01. حدد : $\Re e(Z)$ و $\mathrm{Im}(Z)$.

- نحسب :

$$Z=\frac{z-2-i}{z+i}=\frac{x+yi-2-i}{x+yi+i}=\frac{(x-2+(y-1)i)}{(x+(y+1)i)}=\frac{((x-2+(y-1)i))(x-(y+1)i)}{(x+(y+1)i)((x-(y+1)i))}$$

$$=\frac{(x-2)x+(y-1)(y+1)+((x-2)(-y-1)+(y-1)x)i}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2-2x+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+\frac{(x-2)(-y-1)+(y-1)x}{x^2+(y+1)^2}i$$

$$=\frac{x^2-2x+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+\frac{2y-x+2}{x^2+(y+1)^2}i$$

خلاصة : و $Im(Z)=\frac{(x-2)(-y-1)+(y-1)x}{x^2+(y+1)^2}=\frac{2y-x+2}{x^2+(y+1)^2}$

.02 حدد مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون : $\Re e(Z)=\frac{x^2-2x+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$

أ- Z عددا حقيقيا يكافئ : $Im(Z)=\frac{2y-x+2}{x^2+(y+1)^2}=0$

يكافئ : $2y-x+2=0$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لمستقيم

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون : Z عددا حقيقياهي المستقيم الذي معادلة ديكارتية له هي : $2y-x+2=0$

ب- Z عددا تخيليا صرفا يكافئ $\Re e(Z)=\frac{x^2-2x+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}=0$

يكافئ $\frac{(x-1)^2+(x-0)^2-2}{x^2+(y+1)^2}$

يكافئ $(x-1)^2+(x-0)^2-2=0$

يكافئ $(x-1)^2+(x-0)^2=2=\sqrt{2}^2$

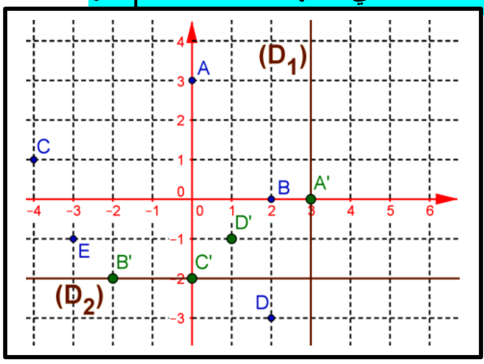
و هي تمثل معادلة ديكارتية لدائرة مركزها النقطة Ω التي لحقها $z_\Omega=1$ و شعاعها $r=\sqrt{2}$

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون : Z عددا تخيليا صرفاهي الدائرة التي مركزها النقطة Ω التي لحقها $z_\Omega=1$ و شعاعها $r=\sqrt{2}$

ج- $|Z|=\sqrt{2}$ أي : $Z=\left|\frac{z-2-i}{z+i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|z-2-i|}{|z+i|}=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow|x-2+(y-1)i|=\sqrt{2}|x+(y+1)i|$$
$$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=2\left(x^2+(y+1)^2\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=2x^2+2y^2+4y+2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x+4y+3=0$$
$$\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+2)^2=\sqrt{5}^2$$

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون : $|Z|=\sqrt{2}$ هي الدائرة التي مركزها النقطة I التي لحقها $z_I=-2-2i$ و شعاعها $r=\sqrt{5}$



.03

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

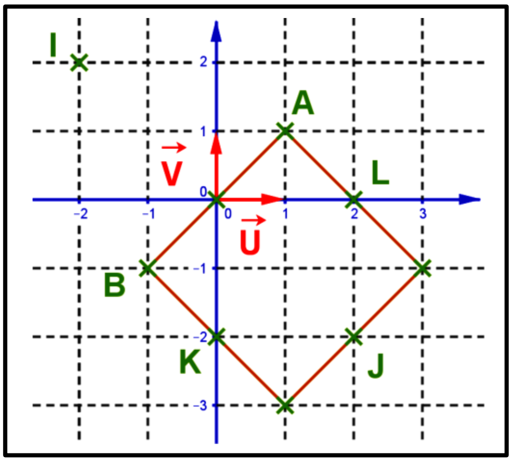
.01 نعطي ألحاق النقط A و B و C و D و E .

هي على التوالي: $z_A=3i$ و $z_B=2$ و $z_C=-4+i$ و $z_D=2-3i$ و $z_E=-3-i$

.02 ننشئ النقط A' و B' و C' و D' التي ألحاقها 3 و $-2-2i$ و $-2i$ و $1-i$.

.03 في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نحدد مبيانيا معيار وعمدة للحق كل نقطة من النقطة التالية :



- بالنسبة ل A: المعيار هو $|z_A|=\sqrt{2}$ العمدة هي $\arg(z_A)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل B: المعيار هو $|z_B|=\sqrt{2}$ العمدة هي $\arg(z_B)\equiv\frac{-3\pi}{4}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل I: المعيار هو $|z_I|=2\sqrt{2}$ العمدة هي $\arg(z_I)\equiv\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل J: المعيار هو $|z_J|=2\sqrt{2}$ العمدة هي $\arg(z_J)\equiv\frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل K: المعيار هو $|z_K|=2$ العمدة هي $\arg(z_K)\equiv\frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل L: المعيار هو $|z_A|=2$ العمدة هي $\arg(z_L)\equiv 0\ [2\pi]$.

.04

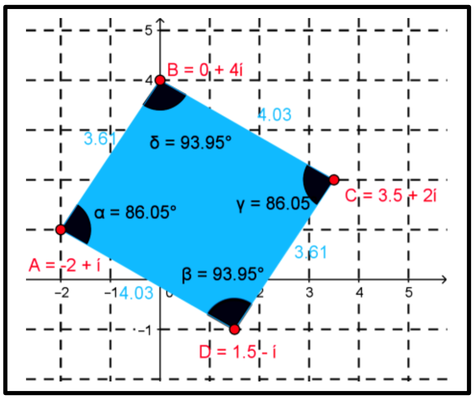
في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط حيث :

.01 $A_{(z_A=1+i\sqrt{3})}$ و $B_{(z_B=-1-i)}$ و $C_{(z_C=3-i)}$. حدد طبيعة المثلث ABC .

- لدينا : $AB=|z_B-z_A|=\left|-1-i-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|=\left|-2-\left(1+\sqrt{3}\right)i\right|=\sqrt{4+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8+2\sqrt{3}}$.
- لدينا : $AC=|z_C-z_A|=\left|3-i-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|=\left|2-\left(1+\sqrt{3}\right)i\right|=\sqrt{4+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8+2\sqrt{3}}$.
- لدينا : $BC=|z_C-z_B|=|3-i+1+i|=|4|=4$.

و منه : $AB=AC$

خلاصة : المثلث ABC متساوي الساقين في A .



.02 ننشئ النقط $A_{(z_A=-2+i)}$ و $B_{(z_B=4i)}$ و $C_{\left(z_C=\frac{7}{2}+2i\right)}$ و $D_{\left(z_C=\frac{3}{2}-i\right)}$

ثم نحدد طبيعة الرباعي $ABCD$.

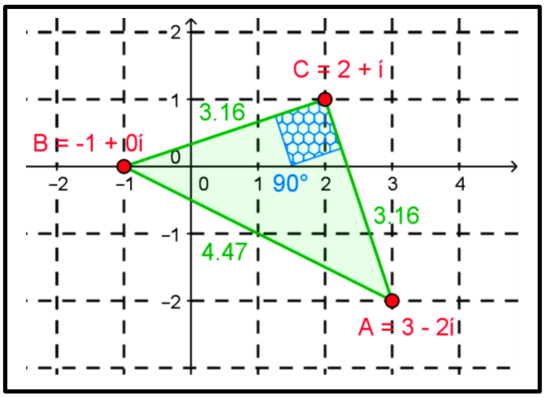
- لدينا : $AB=|z_B-z_A|=|4i-(-2+i)|=|-2+3i|=\sqrt{4+3^2}=\sqrt{13}$.
- لدينا : $DC=|z_C-z_D|=\left|\frac{7}{2}+2i-\left(\frac{3}{2}-i\right)\right|=\left|\frac{7}{2}-\frac{3}{2}+(2+1)i\right|=\sqrt{(2)^2+3^2}=\sqrt{13}$.
- لدينا : $BC=|z_C-z_B|=\left|\frac{7}{2}+2i-4i\right|=\left|\frac{7}{2}-2i\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{53}{4}}=\frac{\sqrt{53}}{2}$.
- لدينا : $AD=|z_D-z_A|=\left|\frac{3}{2}-i-(-2+i)\right|=\left|\frac{7}{2}-2i\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+2^2}=\frac{\sqrt{53}}{2}$.

و منه : $AB=DC$ و $BC=AD$

خلاصة : الرباعي ABCD متوازي الأضلاع .

.03 النقطة A و B و C ألحقها $3-2i$; -1 ; $2+i$ على التوالي .

أ- ننشئ النقط : A و B و C في المستوى العقدي.



ب- نبين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية .

- لدينا : $AB=|z_B-z_A|=|-1-(3-2i)|=|-4+2i|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$.
- لدينا : $AC=|z_C-z_A|=|2+i-(3-2i)|=|-1+3i|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$.
- لدينا : $BC=|z_C-z_B|=|2+i+1|=|3+i|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$.

و منه : $CA=CB$ و $AB^2=CA^2+CB^2$

خلاصة : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية .

.05

أحسب معيار الأعداد: 3 ; -2 ; $5i$; $-3i$; $2-i$; $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1-i\sqrt{3}$ ، $1+i$ ، $1-i$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ، $(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$

لدينا :

- $|3|=3$ و $|-2|=2$ و $|5i|=5$ و $|-3i|=3$ و $|2-i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ و $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$
- $|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$ و $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ و $|1-i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ و
- $\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3\right|=\left|\frac{1+i}{1-i}\right|^3=\left(\frac{|1+i|}{|1-i|}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3=1$ و $|(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)|=|1+i\sqrt{3}||\sqrt{3}-i|=2\times2=4$

.06

نحدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية:

.01

- $z_1=1+i=|z_1|\left(\frac{1}{|z_1|}+i\frac{1}{|z_1|}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_2=1+i\sqrt{3}=|z_2|\left(\frac{1}{|z_2|}+i\frac{\sqrt{3}}{|z_2|}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[2;\frac{\pi}{3}\right]$.
- $z_3=1-i\sqrt{3}=\overline{z_2}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]$.
- $z_4=1-i=\overline{z_1}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_5=7+7i=7(1+i)=[7;0]\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]=\left[7\sqrt{2};0+\frac{\pi}{4}\right]=\left[7\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$.

- $z_6 = -8-8\sqrt{3}i = -8\left(1+i\sqrt{3}\right) = -8z_2 = [8;\pi]\left[2;\frac{\pi}{3}\right] = \left[16;\pi+\frac{\pi}{3}\right] = \left[16;\frac{4\pi}{3}\right] = \left[16;-\frac{2\pi}{3}\right]$
- $z_7 = 3-3i = 3(1-i) = 3z_4 = [3;0]\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right] = \left[3\sqrt{2};0-\frac{\pi}{4}\right] = \left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$

.02

- نحسب : $z_8 = \dfrac{4}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{[4,0]}{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{4}{2},0-\frac{\pi}{3}\right] = \left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$
- نحسب : $z_9 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{\left[2,\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$.
- ثم ستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

من خلال

$$z_9 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{\left[2,\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right] \Leftrightarrow z_9 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow z_9 = \frac{1+\sqrt{3}+\left(-1+\sqrt{3}\right)i}{2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow z_9 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)i}{2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

و منه : $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

و بالتالي : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ خلاصة : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

.07

.01 حدد المعيار و عمدة الأعداد العقدية التالية "

أ - $z_1 = \sqrt{6}-i\sqrt{2} = a+bi$ لدينا : $|z_1| = \left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$ و $\arg z_1 \equiv \alpha\ [2\pi]$ مع

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{6}}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{|z_1|} = \dfrac{-\sqrt{2}}{|z_1|} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

و منه : $\alpha \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ و بالتالي $\arg z_1 \equiv \alpha \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

خلاصة : معيار $|z_1| = 2\sqrt{2}$ و عمدة $\arg z_1 \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

ب – $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = a + bi$ لدينا : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = |z_2|$ و $\arg z_2 \equiv \alpha\ [2\pi]$ مع

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{|z_2|} = \frac{-1}{2|z_2|} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{b}{|z_2|} = \frac{-1}{2|z_2|} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

و منه : $\alpha \equiv -\frac{3\pi}{4} \equiv \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$ و بالتالي $\arg z_2 \equiv \alpha \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

خلاصة : معيار $|z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و عمدة $\arg z_2 \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

ج – بالنسبة ل $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ نستعمل طريقة أخرى :

نلاحظ أن :

$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right]$$

خلاصة : معيار $|z_3| = 1$ و عمدة $\arg z_3 \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

د – بالنسبة ل : $z_1 z_2$

- بالنسبة للمعيار : $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$
- بالنسبة للعمدة : $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \equiv -\frac{11\pi}{12}\ [2\pi]$

بالنسبة ل : $\frac{z_1}{z_2}$

- بالنسبة للمعيار : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4$
- بالنسبة للعمدة : $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

بالنسبة ل : ${z_2}^2$

- بالنسبة للمعيار : $|{z_2}^2| = |z_2|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
- بالنسبة للعمدة : $\arg({z_2}^2) \equiv 2 \times \arg(z_2) \equiv 2 \times -\frac{3\pi}{4} \equiv \frac{-3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

.02 نحدد الشكل المثلثي و الشكل الأسي ثم المعيار و عمدة لكل عدد عقدي من بين الأعداد العقدية التالية "

- $z_1 = 3 - 3i = 3(1-i) = [3;0] \times \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ و منه: $|z_1| = 3\sqrt{2}$ و $\arg(z_1) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

- $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = [2;0]\times\left[1;-\frac{\pi}{3}\right] = \left[2;-\frac{\pi}{3}\right] = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ و منه : $|z_1| = 3\sqrt{2}$ و $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

- $z_1z_2 = \left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]\left[2;-\frac{\pi}{3}\right] = \left[3\sqrt{2}\times 2;-\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[6\sqrt{2};-\frac{7\pi}{12}\right]$ و منه : $|z_1| = 3\sqrt{2}$ و

$$= 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\times 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 6\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i} = 6\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$$

$\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right] = \left[4;\frac{\pi}{12}\right] = 4e^{\frac{\pi}{12}i}$ و منه : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 4$ و $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

- $z_2{}^3 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{3\pi}{4}\right]^3 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3;3\times\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{9\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4};-2\pi-\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

و منه : $\left|z_2{}^3\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\arg\left(z_2{}^3\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

- $z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \left[2;\frac{-\pi}{12}\right] = 2e^{-\frac{\pi}{12}i}$.

- $z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \left[2;\frac{\pi}{12}\right]$.

- $z_5 = -2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-\pi i}\times e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \left[2;\frac{\pi}{4}\right]$

- $z_6 = \frac{2i}{1-i} = \frac{\left[2;\frac{\pi}{2}\right]}{\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}};\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

03. نعطي إخطاط ل أ- $\cos^3 x$. ب- $\sin^4 x$.

أ- إخطاط ل $\cos^3 x$

حسب صيغتي أولير formules d'Euler $\cos x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ و $\sin x = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ مع $z = [1;x] = \cos x + i\sin x$

أو أيضا : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ و $\cos x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$ مع $\cos x + i\sin x = e^{ix}$

طريقة 1 : نستعمل الكتابة $\cos x = \frac{z+\overline{z}}{2}$

لا تنسى :

- صيغة موفر $z^n = [1;nx] = \cos nx + i\sin nx$ formule de Moivre

- $z^n+\overline{z}^n=2\cos(nx)$ و $z^n-\overline{z}^n=2i\sin(nx)$ و $z^n\times\overline{z}^n=1$

ومنه :

$$\cos^3 x=\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3(z+\overline{z})^3=\frac{1}{8}\left(z^3+3z^2\overline{z}+3z\overline{z}^2+\overline{z}^3\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(z^3+\overline{z}^3+3z\overline{z}(z+\overline{z})\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(2\cos(3x)+3\times1\times2\cos x\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(2\cos3x+6\cos x\right)$$

خلاصة : $\boxed{\cos^3 x=\frac{1}{8}\left(2\cos3x+6\cos x\right)}$

طريقة 2 : نستعمل الكتابة $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

لا تنسى :

- $e^{ix}\times e^{iy}=e^{i(x+y)}$ و $\frac{e^{ix}}{e^{iy}}=e^{i(x-y)}$ و $\frac{1}{e^{ix}}=e^{-ix}$ و $\left(e^{ix}\right)^n=e^{inx}$.
- $\left(e^{ix}\right)^n+\left(e^{-ix}\right)^n=2\cos(nx)$ و $\left(e^{ix}\right)^n-\left(e^{-ix}\right)^n=2i\sin(nx)$ و $e^{inx}\times e^{-inx}=1$

ومنه :

$$\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\left(e^{ix}\right)^3+3\left(e^{ix}\right)^2\times e^{-ix}+3e^{ix}\times\left(e^{-ix}\right)^2+\left(e^{-ix}\right)^3\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(e^{i3x}+3e^{i2x}\times e^{-ix}+3e^{ix}\times e^{-i2x}+e^{-i3x}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(e^{i3x}+e^{-i3x}+3e^{ix}\times e^{-ix}\times\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(2\cos(3x)+3\times1\times2\cos x\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(2\cos3x+6\cos x\right)$$

خلاصة : $\boxed{\cos^3 x=\frac{1}{8}\left(2\cos3x+6\cos x\right)}$

ب - إخطاط ل $\sin^4 x$

طريقة 1 : نستعمل الكتابة $\sin x=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

لا تنسى :

- $z^n=[1;nx]=\cos nx+i\sin nx$ صيغة موفر formule de Moivre
- $z^n+\overline{z}^n=2\cos(nx)$ و $z^n-\overline{z}^n=2i\sin(nx)$ و $z^n\times\overline{z}^n=1$

ومنه :

$$\sin^4 x = \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^4 = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 (z-\overline{z})^3 = \frac{1}{16}\left(z^4 - 4z^3\overline{z} + 6z^2\overline{z}^2 - 4z\overline{z}^3 + \overline{z}^4\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(z^4 + \overline{z}^4 - 4z\overline{z}\left(z^2 + \overline{z}^2\right) + 6z^2\overline{z}^2\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 4\times 1\times 2\cos 2x + 6\times 1\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)$$

خلاصة : $\boxed{\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)}$

طريقة 2 : نستعمل الكتابة $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

لا تنسى :

- $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$ و $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$ و $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$ و $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$.
- $\left(e^{ix}\right)^n + \left(e^{-ix}\right)^n = 2\cos(nx)$ و $\left(e^{ix}\right)^n - \left(e^{-ix}\right)^n = 2i\sin(nx)$ و $e^{inx} \times e^{-inx} = 1$ ومنه :

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4 - 4\left(e^{ix}\right)^3 \times e^{-ix} + 6\left(e^{ix}\right)^2 \times \left(e^{-ix}\right)^2 - 4e^{ix} \times \left(e^{-ix}\right)^3 + \left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} - 4e^{i3x} \times e^{-ix} + 6e^{i2x} \times e^{-i2x} - 4e^{ix} \times e^{-i3x} + e^{-i4x}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + e^{-i4x} - 4e^{ix} \times e^{-ix} \times \left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right) + 6\times 1\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 4\times 1\times 2\cos 2x + 6\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)$$

خلاصة : $\boxed{\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)}$

.08

01. نحدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية: $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$; $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

• لدينا : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \left[\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{6}\right]$

$$z_2 = 1 - i = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{6}\right]}{\left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[1; \frac{\pi}{12}\right]$$

خلاصة : $Z = \left[1; \dfrac{\pi}{12}\right]$

02.

أ - نعطي الشكل الجبري ل: Z .

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1 - i} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - i\right)}{1 - i} = \sqrt{2}\,\frac{\left(\sqrt{3} - i\right)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\sqrt{3} + 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right)i\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}i$$

خلاصة : الشكل الجبري ل: Z هو : $Z = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}i$

ب - استنتج قيمة كل من : $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

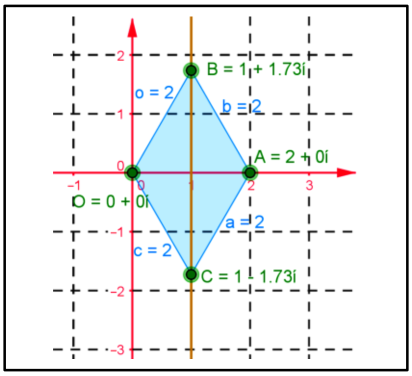
من خلال $Z = \left[1; \dfrac{\pi}{12}\right] = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ و $Z = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}i$

إذن : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ و $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

خلاصة : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ و $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

09.

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (الوحدة 2 cm) نعتبر النقط $A_{(z_A = 2)}$ و $B_{(z_B = 1 + i\sqrt{3})}$ و $C_{(z_C = 1 - i\sqrt{3})}$



01. أ - نعطي الشكل المثلثي و الشكل الأسي z_B ثم ل z_C .

• $z_B = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \left[2; \dfrac{\pi}{3}\right] = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

• $z_C = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \left[2; -\dfrac{\pi}{3}\right] = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب - ننشئ النقط A و B و C .

ج - نستنتج مبيانيا طبيعة الرباعي OBAC : لدينا OBAC معين .

02. نحدد ثم أنشئ (Δ) المجموعة النقط M_z من المستوى العقدي حيث : $|z| = |z - 2|$.

لدينا : $|z| = |z-2| \Leftrightarrow OM = AM$
$\Leftrightarrow MO = MA$

و منه : مجموعة النقط M هي واسط القطعة $[OA]$.

03. x و y من $\mathbb{R}$ لكل النقطة M لحقها العدد العقدي $z = x + yi$ (مع $z \neq z_A$) نربط ها بالنقطة M' التي لحقها z' حيث $z' = f(z) = \dfrac{-4}{z-2}$.

أ- نحل المعادلة : $f(z) = z$.

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{-4}{z-2} = z$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (z-1)^2 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow z - 1 = i\sqrt{3} \text{ أو } z - 1 = -i\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \text{ أو } z = 1 - i\sqrt{3}$$

خلاصة : حلي المعادلة هما : $z = 1 - i\sqrt{3}$ أو $z = 1 + i\sqrt{3}$.

ب- نستنتج النقطتين التي تربط B و C .

النقطة B نربطها بنفسها إي صامدة نفس الشيء ل C .

ج- لتكن G مركز ثقل المثلث OAB نربطها ب G' حدد ثم أنشئ النقطة G' .

لدينا : لحق G يحقق ما يلي : $Z_G = \frac{1}{3}(Z_O + Z_A + Z_B) = \dfrac{2+1-i\sqrt{3}}{3} = 1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

و منه : لحق G' يحقق ما يلي $Z_{G'} = \dfrac{-4}{1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 2} = \dfrac{-12}{-3 + i\sqrt{3}} = \dfrac{-12\left(-3 - i\sqrt{3}\right)}{9+3} = 3 + i\sqrt{3}$

04.

أ- نبين أن : $|z' - 2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$. لدينا :

$$|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|} \Leftrightarrow \left|\frac{-4}{z-2} - 2\right| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{-4-2z+4}{z-2}\right| = \frac{2|z|}{|z-2|} \Leftrightarrow \left|\frac{-2z}{z-2}\right| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

خلاصة : $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$

ب- نفترض أن : النقطة M تنتمي ل (Δ) نربطها بالنقطة M' . بين أن M' تنتمي لدائرة يتم تحديد مركزها و شعاعها .

لدينا : $|z| = |z-2|$ و $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$ و منه : $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z|} = 2$ و منه M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة A التي لحقها 2 و شعاعها $R = 2$. خلاصة : $M' \in \mathscr{C}(A;2)$